PRACE MATEMATYCZNE III, 1973

MIECZYSŁAW KUCHARZEWSKI

KOVARIANTE ABLEITUNG DER LINEAREN GEOMETRISCHEN OBJEKTE

In den Arbeiten [1], [2] und [3] wurde die kovariante Ableitung der Tensordichten definiert und ihre allgemeine Form bestimmt. In dieser Note werden diese Eergebnisse auf beliebige lineare geometrische Objekte verallgemeinert. Insbesondere in den Paragraphen 1, 2 wird die kovariante Ableitung der linearen homogenen geometrischen Objekte behandelt. Die kovariante Ableitung für diejenigen nicht homogenen wird in den §§ 3, 4 definiert.

§ 1. Es sei $\omega = (\omega^a)$, $a = 1, 2, \ldots, m$, ein abstraktes geometrisches Objekt (vgl. [5], S. 24, abstract) mit der folgenden Transformationsformel

$$\omega' = F(L)\,\omega \tag{1.1}$$

und mit der Fiber (vgl. [5], S. 24, fibre) $M = R^m$. Die in (1.1) auftretenden Symbole sind folgendermaßen zu verstehen:

$$\omega = \| \omega^{\beta} \|, \; \omega' = \| \omega^{\alpha'} \|, \; F(L) = \| F^{\alpha}_{\beta}\,(L) \|, \; \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m,$$

$$L = (A^{i'}_{k_1}, \ldots A^{i'}_{k_1 \ldots k_s}), \; A^{i'}_{k_1 \ldots k_t} = \frac{\partial^t \xi^{i'}}{\partial \xi^{k_t} \ldots \partial \xi^{k_1}}; \; i, k_1 \ldots k_t = 1, 2, \ldots, n.$$

Aus (1.1) folgt, daß ω ein lineares homogenes geometrisches Objekt s-ter Klasse ist. Es hat m-Komponenten. Überdies werden wir voraussetzen, daß die Funktion F der Klasse C_1 ist und daß ω auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit der Klasse $r \geqslant s + 1$ definiert ist.

Mit Hilfe des Objekt ω kann man, ganz analog wie in der Arbeit [3], ein neus Objekt mit der Fiber $N = R^N$, $N = (1 + n)\,m$, und mit den Komponenten $(\omega^a, \omega^a{}_{,\nu})$, $\omega^a{}_{,\nu} = \partial\omega^a/\partial\xi^\nu$, bilden. Die Transformationsformel des Objekt $(\omega^a, \omega^a{}_{,\nu})$ besteht aus (1.1) und (1.2)

$$\omega^{\alpha'}{}_{,\nu} = F^{\alpha'}_{\beta\nu'}\, A^{\nu'}_{\nu}\, \omega^{\beta} + F^{\alpha'}_{\beta}\, A^{\nu'}_{\nu}\, \omega^{\beta}{}_{,\nu'}. \tag{1.2}$$

Das in (1.2) auftretende Symbol $F^{\alpha'}_{\beta,\nu}$ bedeutet die partielle Ableitung der Funktion $F^{\alpha'}_{\beta}$ hinsichtlich ξ^ν. Es hat also die Form

$$\partial F^{\alpha'}_{\beta}/\partial \xi^{\nu} = \sum_{t=1}^{s} \sum_{i,k_1 \ldots k_t=1}^{n}{}' (\partial F^{\alpha'}_{\beta}/\partial A^{i'}_{k_1 \ldots k_t}) A^{i'}_{k_1 \ldots k_t \nu} = \sum_{t=1}^{s} F^{\alpha' k_1 \ldots k_t}_{\beta i'} A^{i'}_{k_1 \ldots k_t \nu}.$$

Nach diesen Vorbereitungen kann die kovariante Ableitung des Objektes (1.1) folgendermaßen definiert werden.

DEFINITION 1.1. *Kovariante Ableitung des Objekts* (1.1) *ist jedes Funktionensystem*

$$D^{\alpha}_{\nu}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, m, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

das die folgenden Bedingungen erfüllt.

1°. *D^{α}_{ν} sind nur von ω^{α} und $\omega^{\alpha}{}_{,\nu}$ abhängig, d. h.*

(1.3) $$D^{\alpha}_{\nu} = D^{\alpha}_{\nu}\,(\omega^{\beta}, \omega^{\beta}, \mu).$$

2°. *D^{α}_{ν} sind hinsichtlich ω^{α} additiv, d. h. für jede zwei einfache (vgl.* [5], *S. 24, particular). Objektenfelder $\underset{1}{\omega}$ und $\underset{2}{\omega}$ gilt die Relation*

(1.4) $$D^{\alpha}_{\nu}(\underset{1}{\omega^{\beta}} + \underset{2}{\omega^{\beta}}),_{\mu}(\underset{1}{\omega^{\beta}} + \underset{2}{\omega^{\beta}}),_{\mu}) = D^{\alpha}_{\nu}(\underset{1}{\omega^{\beta}}, \underset{1}{\omega^{\beta}},_{\mu}) + D^{\alpha}_{\nu}(\underset{2}{\omega^{\beta}}, \underset{2}{\omega^{\beta}},_{\mu}).$$

3°. *Das Produkt eines beliebigen Feldes der einfachen Objekte ω und eines beliebigen Skalarfeldes σ erfüllt die Leibnizsche Regel:*

(1.5) $$D^{\alpha}_{\nu}\,(\sigma\omega^{\beta}, (\sigma\omega^{\beta}),_{\mu}) = \sigma D^{\alpha}_{\nu}\,(\omega^{\beta}, \omega^{\beta},_{\mu}) + \sigma,_{\nu}\,\omega^{\alpha}.$$

4°. *D^{α}_{ν} ist ein geometrisches Objekt mit der folgenden Transformationsformel:*

(1.6) $$D^{\alpha'}_{\nu'} = F^{\alpha'}_{\beta\mu}(L)\, A^{\mu}_{\nu'} D^{\beta}_{\mu}.$$

Die Bedingung 1° ist mit der Voraussetzung äquivalent, daß die Funktionen D^{α}_{ν}, R^{N} in $R^{n.m}$ abbilden.

In (1.5) wird die gewöhnliche partielle Ableitung statt derjenigen kovarianten eingesetzt, weil wir in [1] (S. 63, Satz 2.1) gezeigt haben, daß diese beide für Skalare identisch sind.

§ 2. Die Existenz und die allgemeine Form der kovarianten Ableitung wird im nachstehenden Satz bestimmt.

SATZ 2.1. *Jede kovariante Ableitung des Objektes* (1.1) *hat die Gestalt*

(2.1) $$D^{\alpha}_{\nu} = \omega^{\alpha},_{\nu} + C^{\alpha}_{\beta\nu}\omega^{\beta}$$

wo $C^{\alpha}_{\beta\nu}$ konstant sind, d.h. von ω^{β} und $\omega^{\beta},_{\mu}$ nicht abhängen.

Die Konstanten $C^{\alpha}_{\beta\nu}$ bilden ein geometrisches Objekt mit der Transformationsformel

(2.2) $$C^{\alpha'}_{\beta'\nu'} = F^{\alpha'}_{\alpha}\, C^{\alpha}_{\beta\nu} F^{\beta}_{\beta'} A^{\nu}_{\nu'} + F^{\alpha'}_{\beta} F^{\beta}_{\beta',\nu'},$$

in der $F^{\beta}_{\beta'}$ *die Elemente der zur* $F = \| F^{\alpha'}_{\alpha} \|$ *inversen Matrix* F^{-1} *und* $F^{\beta}_{\beta',\nu}$*, ihre hinsichtlich* $\xi^{\nu'}$ *partiellen Ableitungen sind.*

B e w e i s. Zuerst nehmen wir σ in (1.5) ein konstantes Skalarfeld an, d.h. derart, daß

$$\sigma_{,\nu} = 0$$

ist. Dann erhalten wir die Relation

$$D^{\alpha}_{\nu}(\sigma\omega^{\beta}, \sigma\omega^{\beta}_{,\mu}) = \sigma D^{\alpha}_{\nu}(\omega^{\beta}, \omega^{\beta}_{,\mu}). \tag{2.3}$$

die zeigt, daß die Funktionen D^{α}_{ν} der ersten Ordnung homogen sind. Aus (2.3) und (1.4) ergibt sich, daß D^{α}_{ν} linear sind. Sie müssen also die Form

$$D^{\alpha}_{\nu} = C^{\alpha\mu}_{\beta\nu}\,\omega^{\beta}_{,\mu} + C^{\alpha}_{\beta\nu}\,\omega^{\beta}, \tag{2.4}$$

haben, wo $C^{\alpha\mu}_{\beta\nu}$ und $C^{\alpha}_{\beta\nu}$ von ω^{β} und $\omega^{\beta}_{,\mu}$ unabhängige Konstanten sind.

Mit Hilfe von (2.4) kann die linke Seite der Identität (1.5) in der Form

$$D^{\alpha}_{\nu}(\sigma\omega^{\beta}, (\sigma\omega^{\beta})_{,\mu}) = C^{\alpha\mu}_{\beta\nu}(\sigma\omega^{\beta})_{,\mu} + C^{\alpha}_{\beta\nu}\,\sigma\omega^{\beta}, \tag{2.5}$$

dargestellt werden. Die rechte Seite von (1.5) nimmt dann die folgende Gestalt

$$\sigma D^{\alpha}_{\nu}(\omega^{\beta}, \omega^{\beta}_{,\mu}) + \sigma_{,\nu}\omega^{\alpha} = \sigma C^{\alpha\mu}_{\beta\nu}\,\omega^{\beta}_{,\mu} + \sigma C^{\alpha}_{\beta\nu}\,\omega^{\beta} + \sigma_{,\nu}\omega^{\alpha}, \tag{2.6}$$

an. Durch Vergleichen von (2.5) und (2.6) ergibt sich

$$(C^{\alpha\mu}_{\beta\nu} - \delta^{\alpha}_{\beta}\delta^{\mu}_{\nu})\,\sigma_{,\mu}\,\omega^{\beta} = 0.$$

Da $\sigma_{,\mu}$ ω^{β} ganz beliebig sind. es folgt

$$C^{\alpha\mu}_{\beta\nu} = \sigma^{\alpha}_{\beta}\sigma^{\mu}_{\nu} \tag{2.7}$$

daraus. Wird (2.7) in (2.4) eingesetzt, so erhalten wir die Formel (2.1). Der erste Teil des Satzes wird auf diese Weise bewiesen.

Um zu zeigen, daß $C^{\alpha}_{\beta\nu}$, $\alpha, \beta = 1,2,\ldots,m$, $\nu = 1,2,\ldots,n$, ein geometrisches Objekt mit der Transformationsformel (2.2) bilden, schreiben wir die kovariante Ableitung D^{α}_{ν} in einem neuen Koordinatensystem $(\xi^{\nu'})$.

$$D^{\alpha'}_{\nu'} = \omega^{\alpha'}_{,\nu'} + C^{\alpha'}_{\beta'\nu'}\omega^{\beta'}. \tag{2.8}$$

Auf eine andere Weise kann $D^{\alpha'}_{\nu'}$ mit Hilfe von (1.6) berechnet werden. Das Vergleichen der rechten Seiten von (ś.6) und (2.8) führt zur Identität

$$\omega^{\alpha'}_{,\nu'} + C^{\alpha'}_{\beta'\nu'}\omega^{\beta'} = F^{\alpha'}_{\beta}A^{\nu}_{\nu'}(\omega^{\beta}_{,\nu} + C^{\beta}_{\gamma\nu}\omega^{\gamma}).$$

Aus dieser erhalten wir nach einfachen Umformungen

$$C^{\alpha'}_{\beta'\nu'}F^{\beta'}_{\alpha} = F^{\alpha'}_{\beta}A^{\nu}_{\nu'}C^{\beta}_{\alpha\nu} - F^{\alpha'}_{\alpha,\nu}A^{\nu}_{\nu'}. \tag{2.9}$$

Durch Überschiebung der beiden Seiten von (2.9) mit der zu F inversen Matrix $F^{-1} = \| F^{\alpha}_{\alpha'} \|$ geht (2.9) in die folgende Form

$$C^{\alpha'}_{\beta'\nu'} = F^{\alpha'}_{\beta} A^{\nu}_{\nu'} C^{\beta}_{\alpha\nu} F^{\alpha}_{\beta'} - F^{\alpha'}_{\alpha,\nu} A^{\nu}_{\nu'} F^{\alpha}_{\beta'}, \tag{2.10}$$

über. Die Formel (2.10) ist mit (2.2) äquivalent. Um das zu zeigen, genügt es die linke Seite der Relation

$$-F^{\varkappa'}_{\alpha,\nu} A^{\nu}_{\nu'} F^{\alpha}_{\beta'} = F^{\alpha'}_{\alpha} F^{\eta}_{\beta'\nu'}, \tag{2.11}$$

durch die rechte in (2.10) zu ersetzen.

Die Identität (2.11) erhält man, wenn man die Beziehung

$$F^{\varkappa'}_{\alpha} F^{\alpha}_{\beta'} = \delta^{\alpha'}_{\beta'}$$

nach $\xi^{\nu'}$ differenziert. Der Satz 2.1 ist also vollständig bewiesen.

§ 3. Jetzt wird die kovariante Ableitung der linearen aber nicht homogenen geometrischen Objekte definiert. Zuerst führe ich einige Bezeichnungen und Definitionen ein.

Es sei $\omega\,(\omega^{\alpha})$, $\alpha = 1,2, \ldots, m$, ein abstraktes geometrisches Objekt mit der Fiber $M = R^m$ und mit der folgenden Transformationsformel

$$\omega' = F(L)\,\omega + g(L), \tag{3.1}$$
$$F(L) = \| F^{\alpha'}_{\alpha}(L) \|, \; g(L) = \| g^{\alpha'}(L) \|.$$

ω ist also ein lineares Objekt s-ter Klasse mit m Komponenten. Ganz analog, wie im § 1 werden wir voraussetzen, daß die Funktionen F und g der Klasse C_1 sind und daß ω auf der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit der Klasse $r \geqslant s+1$ definiert ist.

Die Transformation (3.1) hat eine inverse. Diese werde ich folgendermaßen

$$\omega^{\alpha} = F^{\alpha}_{\beta'}(L^{-1})\,\omega^{\beta'} + g^{\alpha'}(L^{-1}),$$

bezeichnen. Dann müssen die nachstehenden Relationen

$$F^{\alpha'}_{\gamma} F^{\gamma}_{\beta'} = \delta^{\alpha'}_{\beta'}, \tag{3.2}$$
$$F^{\alpha'}_{\gamma} g^{\gamma} + g^{\alpha'} = 0,$$

erfüllt werden.

Wir ordnen dem Objekt (3.1) ein lineares homogenes Objekt mit $(m+1)$ — Komponenten $\Omega = (\Omega^{a})$, $a = 1,2, \ldots\ m+1$, zu. Diese Zuordnung wird durch die folgenden Formel

$$\Omega^{\alpha} = \omega^{\alpha}, \quad \alpha = 1,2, \ldots, m,$$
$$\Omega^{m+1} = 1,$$

bestimmt. Bezeichnen wir mit $\bar{F}(L)$ die quadratische Matrix mit $(m+1)$ Reihen und $(m+1)$ Spalten, welche die niedergeschriebene symbolische Form

$$\bar{F}(L) = \left\| \begin{array}{c|c} F(L) & g(L) \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array} \right\|$$

hat, so kann die Transformationsformel von Ω so

$$\Omega' = \bar{F}(L)\,\Omega \tag{3.3}$$

dargestelt werden. Die Elemente der Matrix $\bar{F}$ sind also durch die folgenden Relationen

$$\begin{aligned} \bar{F}^{\alpha'}_{\beta} &= F^{\alpha'}_{\beta}, & \bar{F}^{\alpha'}_{m+1} &= g^{\alpha'}, \\ \bar{F}^{(m+1)'\nu'}_{\beta} &= 0, & \bar{F}^{(m+1)'}_{m+1} &= 1, \end{aligned} \tag{3.4}$$

definiert.

§ 4. Gemäß der Ergebnisse des zweiten Paragraphen (Satz 2.1) hat die kovariante Ableitung Objektes Ω die Form

$$\bar{D}^{a}{}_{\nu} = \Omega,^{a}_{\nu} + \bar{C}^{a}_{b\nu}\,\Omega^{b}, \tag{4.1}$$

wobei $C^{a}_{b\nu}$ von Ω^{a} und $\Omega^{a},_{\nu}$ nicht abhängen. Sie bilden ein geometrisches Objekt mit der folgenden Transformationsformel

$$\bar{C}^{a'}_{b'\nu'} = \bar{F}^{a'}_{c}\,\bar{C}^{c}_{b\nu}\,\bar{F}^{b}_{b'}\,A^{\nu}_{\nu'} + \bar{F}^{a'}_{b}\,\bar{F}^{b}_{a',\nu'}. \tag{4.2}$$

Die Formel (4.2) werden auf vier Teile nach den Komponenten

$$\bar{C}^{\alpha'}_{\beta'\nu'},\quad \bar{C}^{(m+1)'}_{\beta'\nu'},\quad \bar{C}^{(m+1)'}_{(m+1)'\nu'},\quad \bar{C}^{\alpha'}_{(m+1)'\nu'},\ \alpha\ \beta = 1, 2, \dots, m,$$

zerlegt. Wenn man in diesen die Relationen (3.4) berücksichtigt, können diese folgendermaßen

$$\begin{aligned} \bar{C}^{\alpha'}_{\beta'\nu'} &= F^{\alpha'}_{\gamma}\,\bar{C}^{\gamma}_{\beta\nu}\,F^{\beta}_{\beta'}\,A^{\nu}_{\nu'} + g^{\alpha'}\,\bar{C}^{m+1}_{\beta\nu}\,F^{\beta}_{\beta'}\,A^{\nu}_{\nu'} + F^{\alpha'}_{\beta}\,F^{\beta}_{\beta',\nu'}, \\ \bar{C}^{(m+1)'}_{\beta'\nu'} &= \bar{C}^{m+1}_{\beta\nu}\,A^{\nu}_{\nu'}\,F^{\beta}_{\beta'}, \\ \bar{C}^{(m+1)'}_{(m+1)'\nu'} &= \bar{C}^{m+1}_{\beta\nu}\,g^{\beta}\,A^{\nu}_{\nu'} + \bar{C}^{m+1}_{m+1}{}_{\nu}\,A^{\nu}_{\nu'}, \\ \bar{C}^{\alpha'}_{(m+1)'\nu'} &= F^{\alpha'}_{\gamma}\,\bar{C}^{\gamma}_{\beta\nu}\,g^{\beta}\,A^{\nu}_{\nu'} + F^{\alpha'}_{\gamma}\,\bar{C}^{\gamma}_{m+1\,\nu}\,A^{\nu}_{\nu'} + g^{\alpha'}\,\bar{C}^{m+1}_{\beta\nu}\,g^{\beta}\,A^{\nu}_{\nu'} + \\ &+ g^{\alpha'}\,\bar{C}^{m+1}_{m+1\,\nu}\,A^{\nu}_{\nu'} + F^{\alpha'}_{\beta}\,g^{\beta},_{\nu'}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

dargestellt werden. Die Formel (4.1) für die kovariante Ableitung zerlegen wir auf zwei Teile,

$$\begin{aligned} \bar{D}^{\alpha}_{\nu} &= \omega^{\alpha},_{\nu} + \bar{C}^{\alpha}_{\beta\nu}\,\omega^{\beta} + \bar{C}^{\alpha}_{m+1\,\nu}, \\ \bar{D}^{m+1}_{\nu} &= \bar{C}^{m+1}_{\beta\nu}\,\omega^{\beta} + \bar{C}^{m+1}_{m+1\,\nu}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Die kovariante Ableitung des Objektes Ω hat die folgende Transformationsformel (Definition 1.1, 4°)

$$\tilde{D}^{a'}_{\nu'} = \tilde{F}^{a'}_{b} A^{\nu}_{\nu'} \tilde{D}^{b}_{\nu} \tag{4.5}$$

die sich auf zwei Teile zerfällt,

$$\begin{gathered} \tilde{D}^{\alpha'}_{\nu'} = F^{\alpha'}_{b} A^{\nu}_{\nu'} \tilde{D}^{\beta}_{\nu} + g^{\alpha'} A^{\nu}_{\nu'} \tilde{D}^{m+1}_{\nu}\,, \\ \tilde{D}^{(m+1)'}_{\nu'} = A^{\nu}_{\nu'} \tilde{D}^{m+1}_{\nu}\,. \end{gathered} \tag{4.6}$$

Aus der zweiten der Formen (4.6) folgt, daß die Bedingung

$$\tilde{D}^{m+1}_{\nu} = 0, \tag{4.7}$$

gegen die Kordinatentransformation invariant ist. Sie hat also einen geometrischen Sinn. Unter dieser Bedingung bilden die Zahlen $\tilde{D}^{\alpha}_{\nu}$, $\alpha = 1,2,\ldots,m$, $\nu = 1,2,\ldots,n$, Komponenten eines geometrischen Objektes mit der Transformationsformel

$$\tilde{D}^{\alpha'}_{\nu'} = F^{\alpha'}_{\beta} \tilde{D}^{\beta}_{\nu}. \tag{4.8}$$

Wenn wir voraussetzen, daß (4.7) für alle Werte (ω^{β}) erfüllt ist, müssen die Konstanten $\tilde{C}^{m+1}_{\beta\nu}$, $\tilde{C}^{m+1}_{m+1\,\nu}$ verschwinden,

$$\tilde{C}^{m+1}_{\beta\nu} = 0, \quad \tilde{C}^{m+1}_{m+1\,\nu} = 0. \tag{4.9}$$

Aus den Formeln (4.3) ergibt sich, daß die Relationen (4.9) auch einen invarianten Charakter haben.

Nach den obigen Bemerkungen wird die nachstehende Definition der kovarianten Ableitung des Objektes (3.1) lar sein.

DEFINITION 4.1. *Das durch die erste der Formeln* (4.4) *bestimmte Objekt wird die kovariante Ableitung des Objektes* (3.1) *genannt, wenn nur die Relationen* (4.9) *erfüllt sind.*

Die soeben definierte kovariante Ableitung werden wir mit D^{α}_{ν} (ohne Schlange) oder mit $\omega^{\alpha};\nu$ bezeichnen. Diese hat die folgenden Eigenschaften:

1. Die kovariante Ableitung von (ω^{α}) hängt nur von ω^{α}, $\omega^{\alpha}{}_{\nu}$ ab. Sie bildet also $R^{(n+1)m}$ in $R^{n\cdot m}$ *ab.*

2. Die kovariante Ableitung des Objektes (ω^{α}) mit der Transformationsformel (3.1) ist ein lineares homogenes geometrisches Objekt mit der Transformationsformel

$$D^{\alpha'}_{\nu'} = F^{\alpha'}_{\beta} A^{\nu}_{\nu'} D^{\beta}_{\nu}.$$

3. Die Konstanten $\tilde{C}^{\alpha}_{\beta\nu}$, $\tilde{C}^{\alpha}_{m+1\,\nu}$, $\alpha, \beta = 1,2,\ldots,m$, $\nu = 1,2,\ldots,n$, welche die kovariante Ableitung bestimmen, bilden ein geometrisches halbzusammengesetztes Objekt mit der Transformationsformel

$$
(4.10)\qquad
\begin{aligned}
\overline{C}^{\alpha'}_{\beta'\nu'} &= F^{\alpha'}_{\gamma} \overline{C}^{\gamma}_{\beta\nu} F^{\beta}_{\beta'} A^{\nu}_{\nu'} + F^{\alpha'}_{\beta} F^{\beta}_{\beta',\nu'},\\
\overline{C}^{\alpha'}_{(m+1)\nu'} &= F^{\alpha'}_{\gamma} \overline{C}^{\gamma}_{\beta\nu} g^{\beta} A^{\nu}_{\nu'} + F^{\alpha'}_{\gamma} \overline{C}^{\gamma}_{m+1\,\nu} A^{\nu}_{\nu'} + F^{\alpha'}_{\beta} g^{\beta}_{,\nu'}.
\end{aligned}
$$

4. Für die linearen homogenen geometrischen Objekte ($g^{\alpha'} = o$) geht die kovariante Ableitung D^{α}_{ν} in diejenige im § 2 definierte über, wenn wir $\overline{C}^{\alpha}_{m+1\,\nu} = 0$ annehmen.

Das aus $\overline{C}^{\alpha}_{\beta\nu}$, $\overline{C}^{\alpha}_{m+1\,\nu}$ gebildete Objekt mit der Transformationsformel (4.10) wird die Parameter der kovarianten Ableitung des Objektes (3.1) bzw. die Parameter der Übervtragung genannt.

LITERATURA

[1]. M. Kucharzewski. *Kovariante Ableitung der Skalare und Dichten,* Prace Mat. U. S. 1 (1969), 61—70.

[2]. M. Kucharzewski, *Kovariante Ableitung der Tensordichten,* Ann. Polon. Math, Ann. Polon Math. 24 (1970), 45—54.

[3] M. Kucharzewski, *Kilka uwag o pochodnej kowariantnej.* Prace Naukowe Pol. Wrocławskiej, 2 (1970), 22—29.

[4]. M. Kucharzewski, *Elementy teorii obiektów geometrycznych* Katowice, 1969.

[5]. M. Kucharzewski and M. Kuczma, *Basic concepts of the theory of geometric objects,* Rozprawy Mat. 43, Warszawa 1964.

MIECZYSŁAW KUCHARZEWSKI

POCHODNA KOWARIANTNA OBIEKTÓW GEOMETRYCZNYCH LINIOWYCH

Streszczenie

W pracy została podana definicja aksjomatyczna (Definition 1.1) pochodnej kowariantnej obiektów geometrycznych liniowych jednorodnych typu [*m*,*n*,*s*]. Istnienie i kształt takiej pochodnej dla obiektów o prawie transformacji

$$
(1)\qquad \omega^{\alpha'} = F^{\alpha'}_{\beta}(L)\,\omega^{\beta},\ \alpha, \beta = 1,2,\ldots, m,
$$

określa twierdzenie następujące (Satz 2.1).

TWIERDZENIE. *Każda pochodna kowariantna obiektu* (1) *ma postać* (2.1), *gdzie* $C^{\alpha}_{\beta\nu}$, $\alpha\ \beta = 1, 2,\ldots, m$, $\nu = 1, 2,\ldots, n$, *są stałymi, które nie zależą ani od* ω^{α} *ani od* $\omega^{\alpha}{}_{,\nu}$. *Stałe te tworzą obiekt geometryczny o prawie transformacji* (2.2).

W oparciu o powyższą definicję określona została (§ 3 i 4) pochodna kowariantna obiektów liniowych niejednorodnych tego samego typu, (Definition 4.1). W myśl tej definicji pochodna kowariantna obiektu o prawie transformacji

$$
\omega^{\alpha'} = F^{\alpha'}_{\beta}(L)\,\omega^{\beta} + g^{\alpha'}(L),
$$

ma postać $D^{\alpha}_{\nu} = \omega^{\alpha'}{}_{\nu} + C^{\alpha}_{\beta\nu}\,\omega^{\beta} + C^{\alpha}_{m+1\,\nu}$ gdzie stałe $C^{\alpha}_{\beta\nu}$, $C^{\alpha}_{m+1\,\nu}$ tworzą obiekt geometryczny o prawie transformacji (4.10).

Oddano do Redakcji 16.2.1970